第 3 节 外接球问题（★★★）

强化训练

1.（2023・全国模拟・★）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AA_1=2$，其外接球的体积为 36π，则此长方体的表面积为（　　）

（A）34　（B）64　（C）$4\sqrt{17}+17$　（D）$8\sqrt{17}+34$

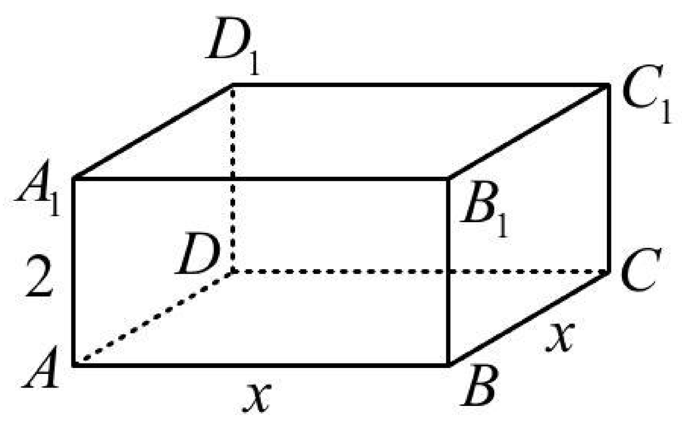
答案：B

解析：如图，求表面积还差正方形 $ABCD$ 的边长，已知外接球半径，可由 $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 求该边长，

由题意，长方体外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi\Rightarrow R=3$，

设 $AB=BC=x$，则 $R=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x^2+4}=3$，解得：$x=4$，

所以长方体的表面积 $S=2x^2+4\times 2x=2x^2+8x=64$.



2.（2023・天津模拟・★）已知正三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，且侧棱长为 1，则此三棱锥的外接球的表面积为（　　）

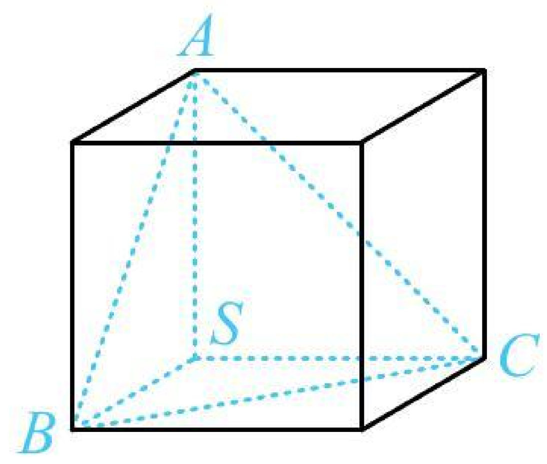
（A）π　（B）3π　（C）6π　（D）9π

答案：B

解析：由三条侧棱两两垂直识别出可按长方体模型处理，

将正三棱锥 $S-ABC$ 放入长方体如图，由题意，$SA=SB=SC=1$，所以其外接球半径 $R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

长方体和三棱锥有相同的外接球，故三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=3\pi$.



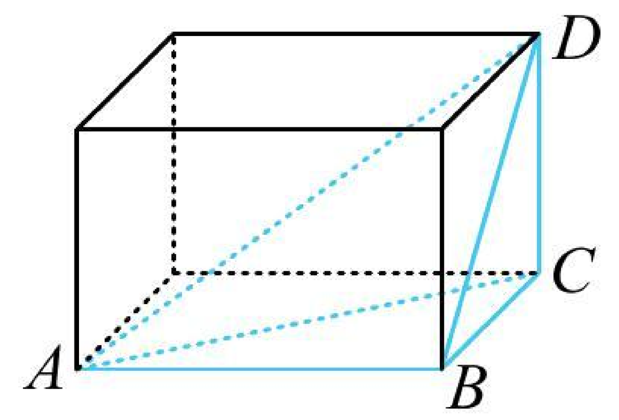
3.（★★）已知 A，B，C，D 在同一球面上，$AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，若 $AB=3$，$AC=\sqrt{13}$，$BD=\sqrt{7}$，则该球的体积是_____.

答案：$\frac{32\pi}{3}$

解析：由$\begin{cases}BC\perp CD\\AB\perp 平面BCD\end{cases}$可发现有直角三角形和过其顶点的垂线段，故可按长方体模型处理，

如图，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2$，$CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{3}$，

所以外接球的半径$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2+CD^2}=2$，体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}$.



4．（2014 • 大纲卷 • ★★）正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 4，底面边长为 2，则该球的表面积为（　　）

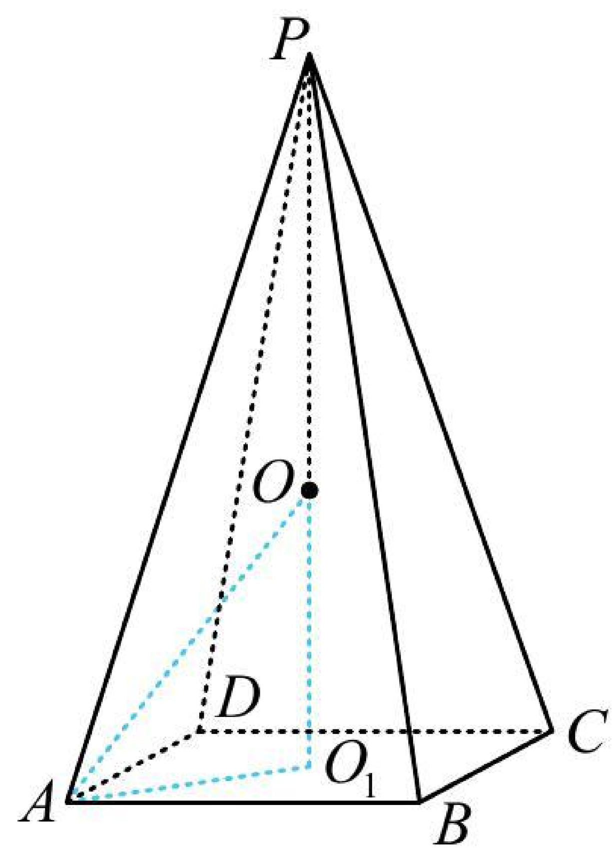
（A）$\dfrac{81\pi}{4}$　（B）16π　（C）9π　（D）$\dfrac{27\pi}{4}$

答案：A

解析：正四棱锥可按内容提要 3 的圆锥模型处理，只需到如图所示的ΔAOO_1中用勾股定理建立方程求R，

由题意，$PO_1=4$，$AB=2\Rightarrow AO_1=\sqrt{2}$，设外接球的半径为$R$，则$OA=OP=R$，$OO_1=4-R$，

在ΔOO_1A中，$AO_1^2+OO_1^2=OA^2$，所以$2+(4-R)^2=R^2$，解得：$R=\dfrac{9}{4}$，故球O的表面积$S=4\pi R^2=\dfrac{81\pi}{4}$.



5．（2023 • 河南郑州模拟 • ★★）已知圆柱的高为 2，侧面积为4π，若该圆柱的上、下底面圆周都在某一球的球面上，则该球的体积为（　　）

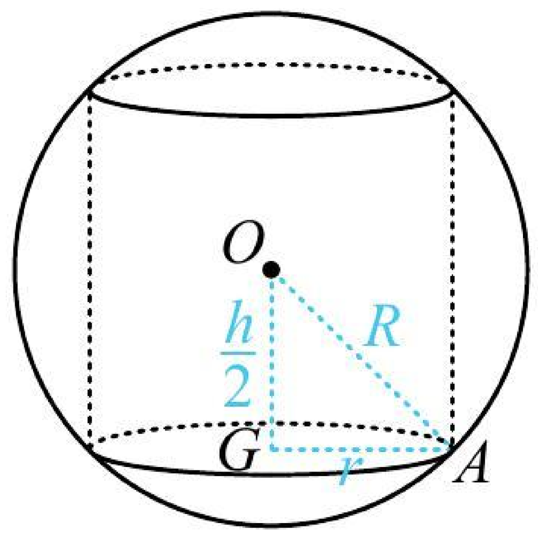
（A）$\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　（B）$\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$　（C）$4\sqrt{2}\pi$　（D）$4\sqrt{3}\pi$

答案：A

解析：圆柱外接球问题，用核心方程$r^2+(\dfrac{h}{2})^2=R^2$处理，

如图，圆柱的高$h=2$，侧面积$S=2\pi rh=4\pi$，所以$r=1$，故球O的半径$R=\sqrt{r^2+(\dfrac{h}{2})^2}=\sqrt{2}$，

所以球O的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.



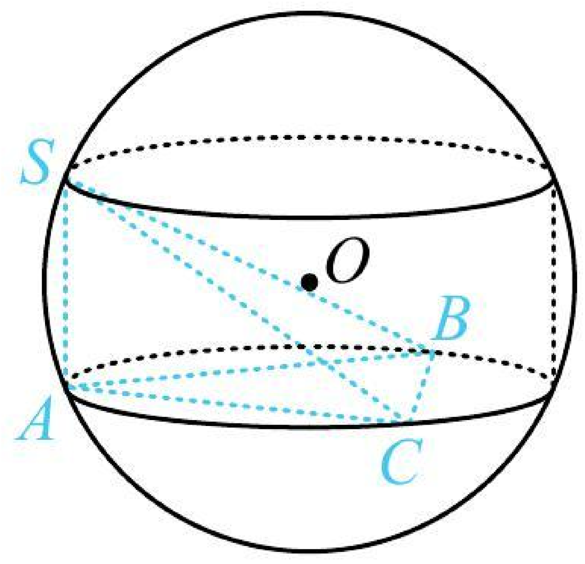
6．（2023•全国乙卷•★★★）已知点 S，A，B，C 均在半径为 2 的球面上，ΔABC 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$平面 ABC，则 $SA=$_____.

答案： 2

解析： 有线面垂直，且 ΔABC 是等边三角形，属外接球的圆柱模型，核心方程是 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$，

如图，圆柱的高 $h=SA$，底面半径 r 即为 ΔABC 的外接圆半径，所以 $r=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\sqrt{3}$，

由题意，球的半径 $R=2$，因为 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$，所以 $3+(\frac{h}{2})^2=4$，解得：$h=2$，故 $SA=2$.



7．（2023•河南模拟•★★★）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，ΔABC 是边长为 6 的等边三角形，D 是 AB 的中点，DC_1 与平面 ABC 所成角的正切值为 1，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为（　　）

（A）75π　　（B）68π　　（C）60π　　（D）48π

答案： A

解析： 直三棱柱只有底面边长，没有高，但高可求，故先由已知条件求高，

如图 1，因为 ΔABC 是边长为 6 的正三角形，所以 $CD=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

又 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$平面 ABC，所以 $\angle CDC_1$ 即为直线 DC_1 与平面 ABC 所成的角，

从而 $\tan\angle CDC_1=\frac{CC_1}{CD}=1$，故 $CC_1=CD=3\sqrt{3}$，

直三棱柱外接球问题可按内容提要第 2 点②的圆柱模型处理，如图 2，模型的核心方程是 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$，

由题意，ΔABC 的外接圆半径 $r=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=2\sqrt{3}$，圆柱的高 $h=CC_1=3\sqrt{3}$，

所以 $R=\sqrt{r^2+(\frac{h}{2})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=75\pi$.

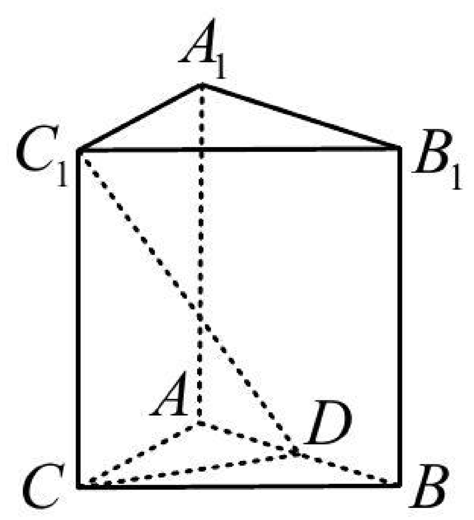


图1

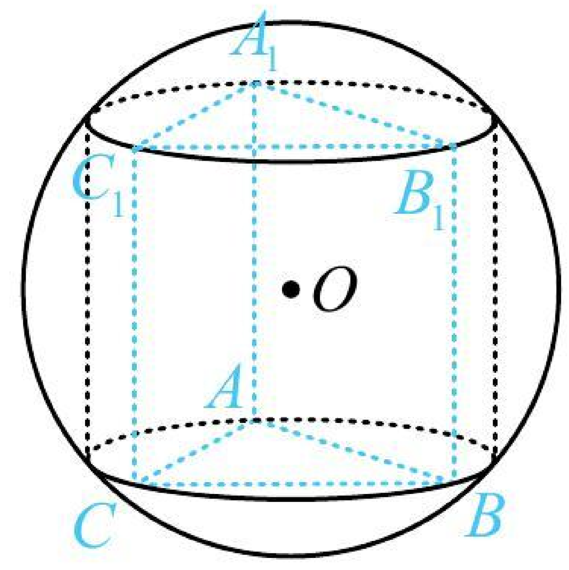


图2

8.（2023·山东烟台模拟·★★★）已知圆锥的侧面积为$4\sqrt{3}\pi$，高为$2\sqrt{2}$，若圆锥可在某球内自由运动，则该球的体积的最小值为（　　）

（A）$8\sqrt{2}\pi$　　（B）8π　　（C）9π　　（D）$9\sqrt{2}\pi$

答案：D

解析：满足题意的最小的球即为该圆锥的外接球，要计算该球的半径，需要由ΔAOO_1的三边满足勾股定理建立方程，下面先由已知条件求解圆锥的参数，

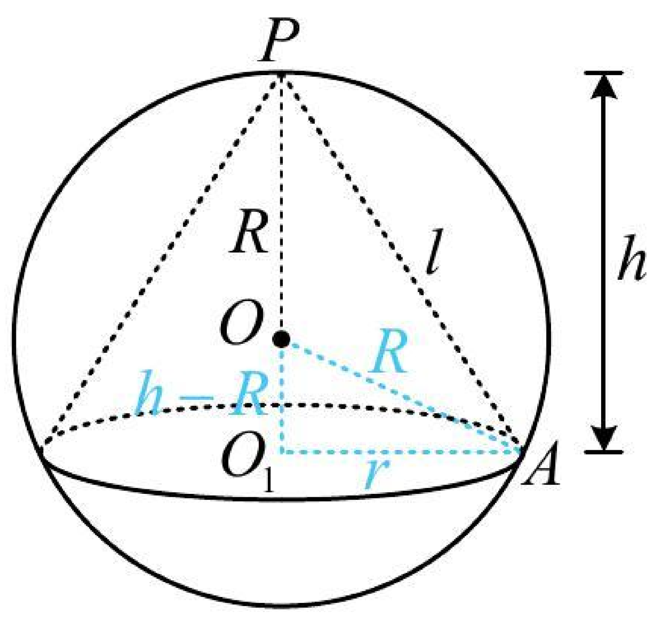
设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，由题意，圆锥的高$h=2\sqrt{2}$，侧面积$S=\pi rl=4\sqrt{3}\pi$，所以$rl=4\sqrt{3}$ ①，

又$r^2+h^2=l^2$，结合$h=2\sqrt{2}$可得$r^2+8=l^2$ ②，

联立①②解得：$l=2\sqrt{3}$，$r=2$，

如图，设圆锥的外接球半径为 R，则$OO_1=PO_1-OP=2\sqrt{2}-R$，在ΔAOO_1中，$OO_1^2+AO_1^2=OA^2$，

所以$(2\sqrt{2}-R)^2+4=R^2$，解得：$R=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，故球 O 的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=9\sqrt{2}\pi$.



9.（2022·安徽模拟·★★★）在正三棱锥$S-ABC$中，$AB=BC=CA=6$，D是SA的中点，若$SB\perp CD$，则该三棱锥的外接球的表面积是_____.

答案：54π

解析：$SB\perp CD$怎么翻译？若知道正三棱锥对棱垂直的性质，则可结合它推出线面垂直，下面先证明一下，

如图 1，取AC中点 E，连接 SE，BE，则$SE\perp AC$，$BE\perp AC$，所以$AC\perp$平面 SBE，故$SB\perp AC$，

又$SB\perp CD$，所以$SB\perp$平面 SAC，故$SB\perp SA$，而正三棱锥三个侧面全等，所以 SA，SB，SC 两两垂直，

有共顶点的两两垂直的棱，可按长方体模型处理，因为$AB=BC=CA=6$，所以$SA=SB=SC=3\sqrt{2}$，

如图 2，外接球半径$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+SB^2+SC^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，所以外接球的表面积$S=4\pi R^2=54\pi$.

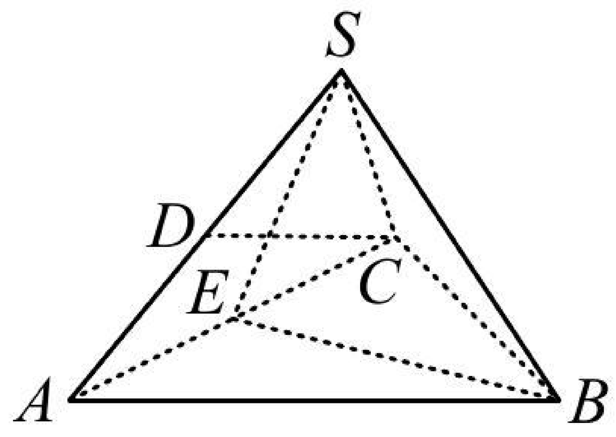


图1

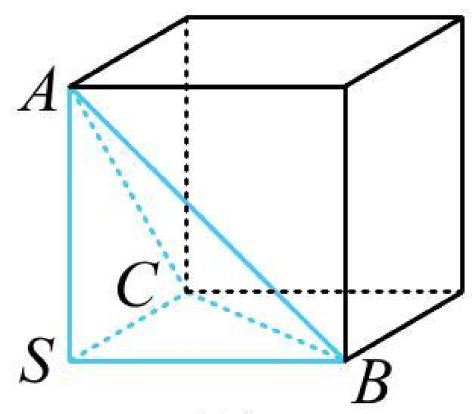


图2

【反思】①本题用到了一个比较好的性质：正三棱锥的相对棱垂直，值得熟悉；②有时模型会隐藏在条件中，需要我们用所给条件作出一些推理才能发现模型特征.

10.（2022·福建模拟·★★★★）若正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在表面积为 65π 的球 O 的球面上，$AB=4\sqrt{3}$，$A_1B_1=2\sqrt{3}$，则正三棱台的高为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）4　　（C）$\sqrt{3}$ 或 3　　（D）3 或 4

答案：D

解析：球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=65\pi\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$，$A_1B_1=2\sqrt{3}\Rightarrow$ 上底面外接圆半径 $IA_1=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=2$，

$AB=4\sqrt{3}\Rightarrow$ 下底面外接圆半径 $KA=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=4$，

高没定，无法判断球心在棱台内部还是外部，故需讨论，

若为图 1，则 $IK=OI-OK=\sqrt{OA_1^2-IA_1^2}-\sqrt{OA^2-KA^2}=\sqrt{\dfrac{65}{4}-4}-\sqrt{\dfrac{65}{4}-16}=3$；

若为图 2，则 $IK=OI+OK=\sqrt{OA_1^2-IA_1^2}+\sqrt{OA^2-KA^2}=\sqrt{\dfrac{65}{4}-4}+\sqrt{\dfrac{65}{4}-16}=4$；

综上所述，正三棱台的高为 3 或 4.

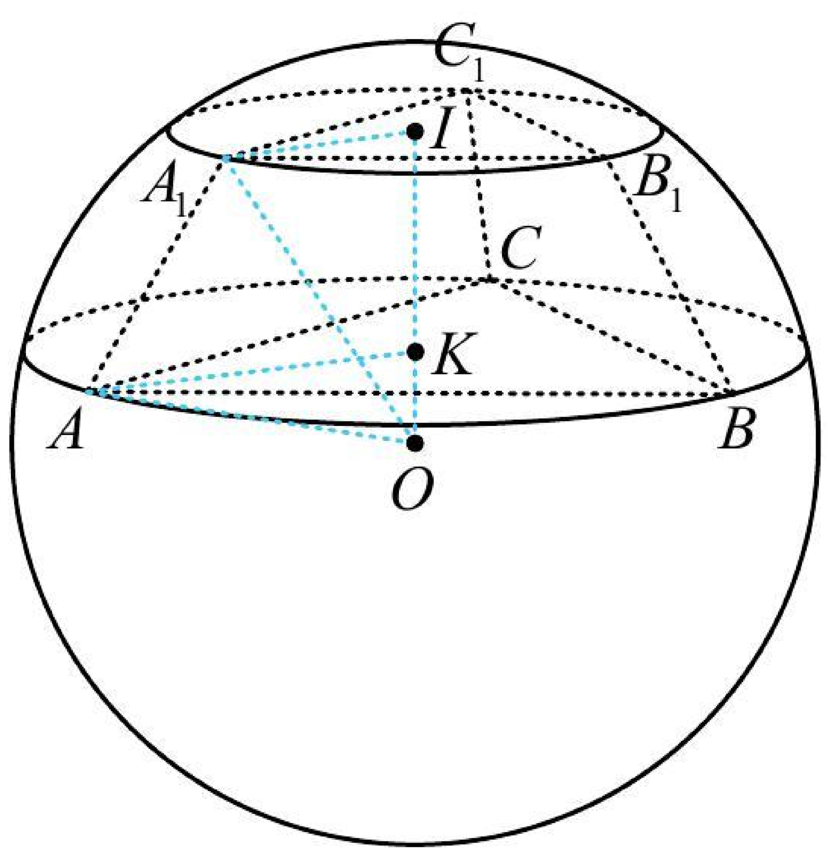


图1

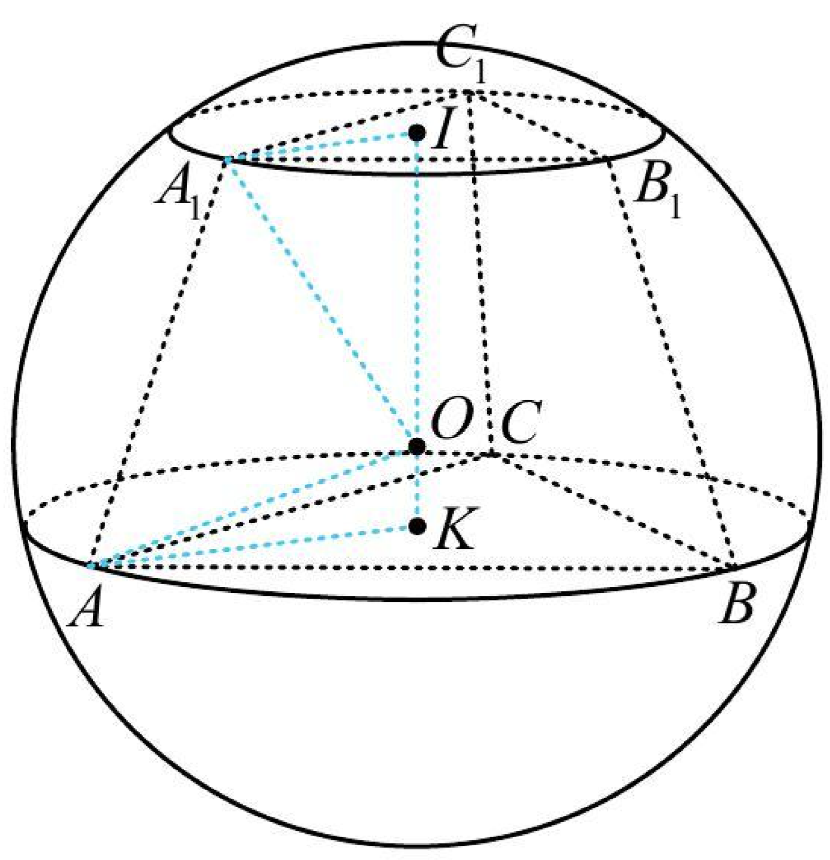
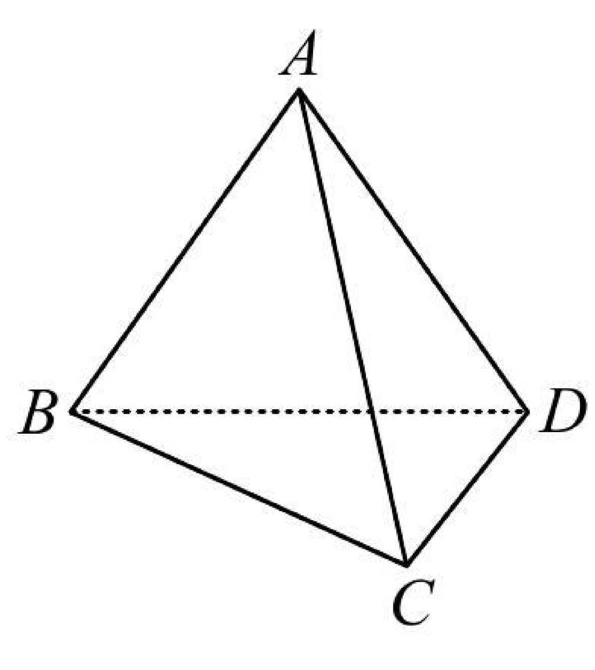


图2

11.（2023·贵州贵阳模拟·★★★★）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，ΔBCD 是边长为 6 的等边三角形，$AB=AD=3\sqrt{3}$，则该几何体的外接球表面积为_____.



答案：$\dfrac{105\pi}{2}$

解析：没有线面垂直、侧棱长相等，不便套用模型，注意到ΔBCD的外心好找，故考虑内容提要中的通法，

如图，过ΔBCD的外心G作垂直于平面BCD的直线，则球心O在该直线上，取BD中点I，连接AI，

因为$AB=AD=3\sqrt{3}$，$BI=3$，所以$AI\perp BD$，且$AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=3\sqrt{2}$，

结合平面$ABD\perp$平面BCD可得$AI\perp$平面BCD，所以$AI/\!/OG$，

作$OH\perp AI$于H，则$OH=IG=\dfrac{1}{3}\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

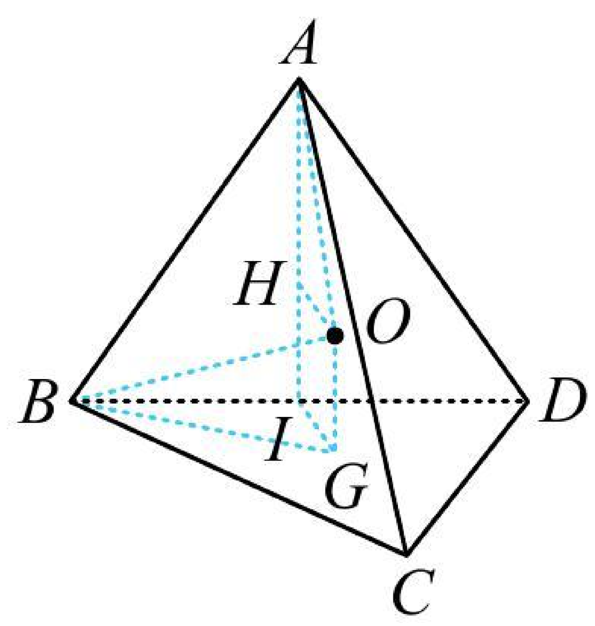
要求外接球半径，可先设OG，利用$OA=OB$来建立方程，OA，OB分别在ΔAHO和ΔBGO中计算，

设$OG=x$，则$HI=x$，$AH=AI-HI=3\sqrt{2}-x$，所以$OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{(3\sqrt{2}-x)^2+3}$，

又$BG=\dfrac{2}{3}\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，所以$OB=\sqrt{BG^2+OG^2}=\sqrt{12+x^2}$，

由$OA=OB$可得$\sqrt{(3\sqrt{2}-x)^2+3}=\sqrt{12+x^2}$，解得：$x=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$，

所以球O的半径$R=OB=\sqrt{12+x^2}=\sqrt{\dfrac{105}{8}}$，故球$O$的表面积$S=4\pi R^2=\dfrac{105\pi}{2}$.



【反思】发现该题条件在四大模型中没有对应的吧？这种情况常用通法处理. 另外，当题干出现面面垂直时，使用通法会比较方便，因为过外心的垂线容易作出与分析.